SU I PRELUDI FILOSOFICI DI GIACINTO BELIEREZ OSSERVAZIONI DI SEBASTIANO...

Sebastiano Purgotti

ve e la chiarezza delle idee, ha dato l'Autore a questi argomenti, altri articoli appariranno probabilmente in questo Giornale. Nel presente noi prendiamo di mira soltanto le supplementarie sue note che versano sopra filosofici oggetti di alto interesse, su i quali è già qualche anno che pur noi abbiamo fatto di pubblico dritto le nostre idee. E se ora su queste note più che su di altro ci tratteniamo, vorrassi perdonare al nostro amor proprio e alla compiacenza di che fummo presi in vedere un sì profondo filosofo convenire con i poveri nostri riflessi e per sino talvolta con le nostre stesse espressioni.

Gli oggetti principali di queste note sono pertanto la limitata divisibilità della materia, che noi pure sostenemmo in una *Memoria sulle proprietà degli atomi* inserita nella Gazzetta ecclettica Veronese sin dal 1836; la semplicità dei primi princìpi dei corpi, che noi pure difendemmo specialmente nella nostra *Teorìa atomica* già da tre anni riprodotta in aggiunta al Classico trattato di Chimica di Thenard nel sesto tomo dell' ultima italiana edizione, ed alcuni particolari modi di vedere intorno alla estensione e precisamente intorno al punto, alla linea, alla superficie, al volume, non che alcuni altri intorno alle quantità negative, i quali analoghi trovati abbiamo sotto tutti gli aspetti a quelli che furono esposti e nelle nostre *Riflessioni ideologiche sull' oggettività delle sensazioni*, e nelle nostre *Lezioni elementari di Aritmetica Algebra e Geometria* che videro la publica luce nel 1837 e delle queli è ora uscita una seconda ampliata edizione (1).

E rapporto alla divisibilità della materia ed ai primi elementi dei corpi, dopo di avere il nostro Autore con

(1) Questa seconda edizione di pagine 624 divisa in due tomi compresi in un sol volume è vendibile presso l' autore in Perugia a paoli 12, ed a chiunque gli diriga franco il prezzo, l' opera è immediatamente da lui spedita franca di porto in qualunque luogo della Dizione Pontificia.

vari elegantissimi argomenti addimostrato che il divisibile conviene che risulti dell' indivisibile, poichè se gli indivisibili ossia i componenti non esistessero, nemmeno i composti esistere potrebbero, i quali altra cosa non sono che i componenti uniti insieme, così nella Nota 6.ª alla pag. 303 conchiude » Di più egli é incontrastabile non solo » che la materia è assolutamente distinta dallo spazio che » la contiene, ma ancora che tutte le sue monadi, qua» lunque ne sia il numero, sono assolutamente distinte tra » loro: se ridicola cosa ella è il dire che tutte le mo» nadi che l' Universo compongono sono non già più es» seri ma un essere solo, o che tutto l' Universo non è » che una sola monade, egli è facile di comprendere l'as» surdità di que' filosofi, i quali si fanno con gravità ad » assicurarci non potere esistere che un essere solo o una » sola sostanza, che questo essere unico è Dio, e che per » conseguenza *Dio è tutto*.

Intorno alle idee del punto, della linea, della superficie e del volume, di cui gli è occorso fare parola ragionando degli elementi semplici; ecco le sue idee. » Si dice » (pag. 298) che il punto non è nulla, perchè non ha » nè lunghezza, nè larghezza, nè spessezza, e che per » conseguenza è la negazione della estensione. Nulla, ben » egli è vero, esso non ha di queste tre dimensioni, se si » riguardano come divisibili, ma esso le ha tutte e tre in» divisibili, e tutte e tre perfettamente eguali tra loro .... » Se il punto non esiste, se esso non ha una lunghezza » indivisibile, egli è mille volte evidente che una infinità » di punti non formerà mai una lunghezza e nemmeno una » lunghezza indivisibile; poichè addizionando una infinità » di zeri, non si otterrà mai che zero (2).

(2) *Una quantità finita può esser prodotta da un numero prodigioso di quantità tenuissime, ma non già da un numero qualunque di zeri*, noi dicevamo a questo proposito (pag. 25 Tomo 2. Lezioni di Aritmetica, Algebra e Geometria Prima Edizione 1837)

» Perchè il punto componga una vera lunghezza di-
» visibile qual' è una linea, fa d' uopo ch' egli abbia una
» vera lunghezza indivisibile la quale è uguale alla sua
» larghezza e profondità. Una retta muovendosi lungo un
» altra che le sia p. es. perpendicolare descrive un piano
» che si compone di altrettante rette continue quanti punti
» continui ha una linea. Il piano è dunque composto di li-
» nee come le linee sono composte di punti, e si può
» dire che il piano meno largo è una linea, e il piano
» il meno lungo e largo è un punto. Segue da ciò che
» una linea ha una larghezza eguale alla sua profondità,
» perchè questa larghezza aggiunta più volte a se stessa
» forma quella del piano che non è zero.... Un piano per-
» pendicolare ad una linea muovendosi lungh' essa descri-
» ve evidentemente un volume composto d' altrettanti pia-
» ni continui quanti v' hanno punti nella linea..... Egli è
» dunque certo (pag. 300) che il piano forma il volume
» e per conseguenza lo spazio di cui il volume non è che
» una parte determinata. Or se il piano non avesse nulla
» di profondità, un numero infinito di piani sovrapposti non
» formerebbe mai la profondità del volume. E' d' uopo dun-
» que dare al piano una profondità indivisibile (3).

(3) Con questa profondità indivisibile che Belierez accorda al piano, eccolo sostenitore di quella *lamina genetrice* che noi per l'esattezza delle idee credemmo necessario introdurre rapporto e alla genesi dei volumi e alla dimostrazione delle loro equivalenze.

Per rapporto però alle idee del punto, della linea, e della superficie noi non conveniamo pienamente coll' Autore nel credere cioè *che sieno indistintamente da attaccarsi le definizioni dei Geometri*. Infatti il punto è un semplice segnale di posizione in cui si fa astrazione da lunghezza, larghezza e profondità: nella linea come limite delle superficie ravvisiamo la sola lunghezza: nella superficie come limite del volume le sole lunghezza e larghezza senza profondità; e bastando al Geometra in mille circostanze l' esame delle proprietà di queste idee estratte, cui nulla di reale corrisponde in natura, queste definizioni sono giustissime. Con le astrazioni però non si fabbrica: ed è perciò che quando il Geometra passa a dirci che la linea è generata dal punto, la superficie dalla linea, e dalla superficie il volume, accorda allora senza accorgersene una esistenza reale al

Ecco finalmente la sua maniera di vedere intorno alle quantità negative (pag. 317). « Ogni quantità negativa —A
» equivalendo a 0—A, o a zero diminuito della quantità A,
» esprime un impossibile, una cosa che ripugna, e di cui il
» nostro spirito non può assolutamente farsi un' idea, per-
» chè non si può togliere al nulla ciò che esso non ha.
» Veruno al mondo non ha dunque l' idea di —A, o di
» 0—A considerato come quantità negativa: si ha sempli-
» cemente l' idea del segno —A, d' una sottrazione cioè
» indicata dal segno —, e d' una quantità positiva rap-
» presentata per A. Se io dico in lingua algebrica, *un*
» *tale è ricco di —5 franchi*, ciò non può mica signi-
» ficare che per avere il valore della sua ricchezza, fa
» d' uopo sottrarre 5 franchi da zero, questo sarebbe as-
» surdo; ma io voglio dire che egli non possiede nulla e
» che egli deve 5 franchi: la sua ricchezza è zero; e la
» quantità positiva 5 franchi è l' ammontare dei suoi de-
» biti.

» Si dice pertanto in Algebra che le quantità negati-
» ve hanno un valor relativo d' altrettanto più piccolo
» quanto il lor valore assoluto è più grande. Come nella
» quantità —A, A è a sottrarsi da zero, si riguarda —A
» come più piccolo di zero per quanto è tutta la quantità
» A; e più A sarà grande, più 0—A, ovvero —A sa-
» rà piccolo. Fa d' uopo lasciare agli Algebristi que-
» sto linguaggio convenzionale se li conduce a delle veri-
» tà utili, come si permette ad un Geometra di partire

punto, alla linea, alla superficie; ed in tal caso fa d' uopo che e il punto e la linea e la superficie non sieno più un' astrazione, ma una cosa reale, che cioè il punto sia il volume il meno lungo largo e profondo possibile, il volume indivisibile; che la linea sia un volume di qualunque lunghezza ma d' insensibile larghezza e profondità: che la superficie sia un volume di qualunque lunghezza e larghezza, ma d'insensibile profondità, siccome e l' Autore ammette e noi pure 4 anni prima di Lui l' ammettemmo, parlando e della genesi della estensione e delle equivalenze di alcuni volumi.

» da una supposizione falsa per giungere alla dimostrazio-
» ne di un teorema per l'assurdo. Essi convengono d'al-
» tronde che queste quantità negative sono impossibili, poi-
» che nulla v' ha che possa esistere di più piccolo che lo
» zero, che il niente, il quale è la negazione della gran-
» dezza e della esistenza.

Fin qui Belierez: e con le sue idee convenendo noi pienamente, aggiungiamo che se molti matematici si permettono per comodo di brevità l'uso del sopracitato linguaggio convenzionale delle *quantità minori di zero* (lo che poco monta perchè non interessa il sostanziale della scienza) niuno or ve n'ha, crediam noi, che si faccia lecito di ammettere l'effettiva loro esistenza. Ed infatti per limitarci ad un esempio solo, forse perchè nell' ultima edizione del Corso completo di Matematiche pure di Francoeur tradotto dal Gasbarri (Firenze 1841) troviamo alla pag. 164 del Tomo I. queste precise parole » *Riguarderemo dunque le quantità negative come minori di zero e le positive come maggiori di zero*, creder dovremo che quel celebre Trattatista ammetta la loro reale esistenza, e sia anch' egli caduto in un errore sì madornale? No certamente: poichè se proseguiamo a leggere, egli tosto soggiunge » *il che infatti non è che una convenzione comoda per facilitare i calcoli*; e poche linee sopra nella pagina stessa così si esprime » *Non è che effettivamente possono esservi quantità minori di zero, ma è evidente*, egli prosegue, *che se si conviene di trattare in seguito queste ineguaglianze* (parla egli di $a-x>0$ e di $a-x<0$) *alla maniera delle equazioni, l' una darà* $a>x$ *e l' altra* $a<x$; *e le espressioni* $a-x>0$; ed $a-x<0$ *non saranno che un modo di scrivere che* $a-x$ *è positivo in un caso e negativo nell' altro*. Ben chiaro è dunque che se Francoeur

fa uso delle citate espressioni, non per questo ammette le quantità minori di zero (4).

E per rapporto a queste assurde espressioni e quindi alle quantità positive e negative da cui hanno tratta l'origine, che diciamo noi ai nostri allievi? Noi stimando opportuno dare alle vedute di Belierez un maggiore sviluppo, facciamo loro notare che ogni risultato di calcolo, non essendo altra cosa che un numero, non può essere composto che di unità tutte della medesima specie. Perciò della specie stessa esser deggiono tutte le quantità concrete che hanno subìto qualche modificazione per trasformarsi nel risultato. E poichè le modificazioni che può subire una quantità non sono che di aumento e di diminuzione, così per quanto complicato sia il complesso delle operazioni cui vengono sottoposte le quantità concrete, per giungere al risultato, esse deggiono esser tutte della stessa natura, e non possono esistere nel calcolo che o in istato di addizione, affette cioè dal segno +, e allora si chiamano *positive*, o in istato di sottrazione affette cioè dal segno — e si chiamano *negative*. E' però quì a notarsi che le quantità le quali esistono in un calcolo in istato di sottrazione, vi esistono o perchè venga espressamente indicata nel problema la sottrazione loro, o perchè vengano nel problema indicate quantitá di natura opposta a quella del risultato che cerchiamo, le quali null'altro esigono per essere valutate

(4) E quì preghiamo que' Studenti i quali vivessero nella opinione che la teorica delle quantità minori di zero fosse necessaria ad adottarsi per l' intelligenza delle più sublimi verità algebriche da essi non ancora studiate, a fare avvertenza che Francoeur nel dirci » *Non è che effettivamente possano esservi quantita minori di zero* » ciò dice senza alcuna limitazione o riserva. E se ciò dice in senso assoluto, e non è d' altronde a dubitarsi che Francoeur non conosca i più sublimi teoremi delle Matematiche pure e miste, è ben chiaro che nemmeno per questi teoremi egli trova necessario ammettere le quantità minori di zero. Ella è infatti cosa di per se stessa evidente senza che siavi bisogno di ricorrere all' autorità, non potersi dare verità nè sublimi nè elementari le quali esigano che per essere intese venga riguardato come vero un assurdo.

nel calcolo che la sottrazione di altrettante quantità positive per quanto esse sono.

Sebbene dunque il problema offra quantità di diversa natura, *tutte omogenee sono a rigore le quantità concrete* che sono segnate nel calcolo. Così p. es. quando cerchiamo l'asse di Tizio che ha 90 scudi di capitale e 100 di debito, per ottenere *il risultato*, noi non uniamo già insieme i capitali e i debiti, ma facciamo il riflesso che gli scudi 100 di debito esigono che vengano sottratti scudi 100 di capitale per poterli distruggere; e perciò scriviamo 90 *di capitale* — 100 *di capitale* = — 10 *di capitale*, calcolo in cui le quantità sono tutte omogenee. Ciò che abbiamo dunque ottenuto è — 10 di capitale, e non giá a rigore scudi 10 di debito. Or questa formola — 10 di capitale ci mostra che il chiesto risultato è assurdo, poichè mentre cercavamo i capitali di Tizio, ci accorgiamo che questi attualmente non vi sono: che anzi mancando essi, manca il minuendo da cui poter togliere il capitale 10 che converrebbe pure impiegare per soddisfare pienamente i suoi debiti; e perciò tale è lo stato di Tizio che quando per qualche industria o fortuna o eredità, ec. avrà acquistato scudi 10, la sottrazione indicata da —10 potrà aver luogo, e zero sarà il suo asse. La stessa espressione — 10 però, che ci mostra assurdo il risultato allorchè vogliamo notare i capitali, se le si tolga il segno —, ci manifesta un risultato vero, allorchè prendiamo di mira una quantità opposta ai capitali, cioè i debiti. Infatti in questo caso i 90 scudi di capitale che il problema ci offre fanno sì che dalla somma totale 100 dei debiti ne vengan sottratti 90, perchè vengono distrutti dagli scudi 90 di capitale; e così abbiamo 100 *di debito* — 90 *di debito* = 10 *di debito*, calcolo in cui parimenti abbiamo quantità tutte della stessa natura. L'assurdo risultato — 10 di capitale ci porta dunque al reale risultato 10 di debito.

Risultando dall' esposto che le *quantità negative* altra cosa non sono che le *stesse quantità positive in istato di sottrazione*, è chiaro che nel loro concetto v' è compresa l' idea della quantità e della sua sottrazione. Si noti bene perciò che il simbolo $-a$ non è il simbolo di una semplice quantitá, ma è il simbolo della sottrazione d' una quantitá, sottrazione in atto eseguibile se v' è un minuendo bastante, sottrazione che andrà ad eseguirsi quando sopraggiungerà il minuendo nel caso che attualmente mancasse nel calcolo, e nel calcolo diciamo, perchè nel pensiero l' idea d' un minuendo, almeno come possibile, non può mancar mai, poichè l' idea d' un sottraendo qual' è $-a$, e di un minuendo son relative, sicchè l' una non può star senza l' altra. E poichè il simbolo $-a$ può essere aggiunto ad una qualche quantità, può esser tolto da una qualche quantitá, e può esistere isolato da qualsiasi quantità, notiamo che aggiungere materialmente il $-a$, non è un fare una reale addizione, ma è un collocare il segnale che a va sottratta; ond' è che la frase *aggiungere quantità negative* equivale all' altra, collocare quantitá positive in istato di sottrazione, o più brevemente *sottrarre quantità*. Togliere materialmente il $-a$ non è un fare una real sottrazione, ma è anzi un togliere quella sottrazione che era indicata dal $-a$, e perciò è un aggiungere, è un far rivivere cioè tutte quelle unità del minuendo che venivano tolte in grazia della indicazione di quella sottrazione che togliamo; ond' è che la frase *sottrarre le quantità negative* equivale all' altra, togliere la sottrazione delle quantità, o più brevemente *aggiungere quantità*. Finalmente se abbiamo il $-a$ isolato per un risultato finale di un qualche calcolo, è a rimarcarsi che a rigore esso non è un risultato, perchè il risultato è una quantità, e il simbolo $-a$ non è che l' indicazione d' una sottrazione di cui è noto il solo sottraendo a. Perciò in tal caso la

formola $-a$ non ci annuncia quantità alcuna, ma solo che il risultato cercato che è il residuo d'una sottrazione è un assurdo, perchè non esiste per mancanza del minuendo da cui a dovrebbe sottrarsi. Ma siccome quando trattisi di casi nei quali si danno quantità di natura opposta a quelle prese di mira, il $-a$ deriva dall' esser le prime in eccesso rispetto alle altre, così il $-a$ ci annuncia al tempo stesso che il risultato è a quando si prendan di mira le quantità opposte. Così -10 di capitale lo abbiam veduto convertito in 10 di debito. E questa osservazione prepara gli allievi ad intendere con la massima facilità le cosi dette *soluzioni negative* delle equazioni.

Noi ci siamo trattenuti intorno al preciso significato del simbolo $-a$, perchè le esatte nozioni intorno ad esso valgono a preservarci da molti errori e l' arme ci offrono per abbatterli.

Per mancanza di queste esatte nozioni sul simbolo $-a$, alcuni Matematici abusando della legge di continuità immaginarono che una quantità determinata possa proseguire a sempre più impiccolirsi senza limite di mano in mano che si renda maggiore la quantità che le si sottrae, cosicchè in grazia di questo progressivo decremento, divenga zero e quindi una quantità negativa d'un valor assoluto sempre crescente. Così p.e. col successivo togliere alla quantitá 3 prima 1, poi 2 in sua vece, poi 3, poi 4, poi 5, poi 6, poi 7 ec. si è supposto che i così detti risultati successivi $2, 1, 0, -1, -2, -3, -4$ non sieno che lo stesso 3 il quale subisce una sempre maggiore diminuzione. In questo modo di vedere i sovra espressi risultati sono tanti residui del 3. Così p. es. il -4 altro non è per noi che un sottraendo il quale non può sottrarsi per mancanza di minuendo, giacchè dopo aver tolto al minuendo 3 tre delle unità che sono nel sottraendo 7, il minuendo è ridotto a zero, e rimangono ancora nel sottraendo 4 unità. Ebbene il -4 nella espo-

sta opinione si riguarda come un vero residuo di $3-7$, come il 3 diminuito di un numero di unità maggiore di quello che esso contiene. Per sostener dunque che -4, o in genere $-a$ è un residuo, conviene ammettere due impossibili, l'uno di poter togliere ad una quantità qualche altra cosa dopo averle tolto tutto ciò che essa è, e la suscettibilità nei numeri di poter rimanere qualche cosa dopo che siasi ad essi tolto più di quello che contengono. E l'assurdo poi di riguardare il -4, il $-a$ come il segno d'una semplice quantità, quasi che il *valore* di una quantità, e la *sottrazione* che di essa quantità debbe farsi potessero fondersi in una cosa sola, conduce all'altro di ammettere che si dieno quantità di tal sorta, le quali mentre serbano la stessa natura delle quantità positive perchè non ne sono che dei residui, hanno anche l'essenzial proprietà di diminuire in grazia della loro addizione le quantitá cui vengono aggiunte; poichè posto l'assurdo che $-a$ sia una quantità, aggiungere $-a$ sarebbe un realmente aggiungere una quantità che ha la proprietà di diminuire, e non già un sottrarre a, siccome noi sosteniamo.

Su questi erronei princìpi intorno al simbolo $-a$ sono basati i sofismi tutti coi quali si pretende di sostenere l'esistenza delle quantità minori di zero, e delle quantità tanto minori le une delle altre quanto più grande è il loro valore assoluto. E quì alcuni noi ne esponiamo colla loro confutazione, per dar norma sul modo con cui potere confutar dei consimili e per avvezzare lo spirito ad una analisi rigorosa sul valore dei segni, affinchè risultino esatte le prime fondamentali nozioni, lo che se è cosa essenziale in tutte le scienze, la è essenzialissima in quelle dell'esattezza.

Or ci si dice: una stessa ineguaglianza come per es. $1<4$ secondo che da ambi i suoi membri si toglie il 3, o il 4, o il 5, si converte in $-2<1$; o in $-3<0$;

o in $-4<-1$. Or se una di queste formole ci esprime che -3 è minore di zero, è dunque evidente che *vi sono quantità minori di zero*: se le altre due ci esprimono che -2 è minore di 1, e -4 è minore di -1, è pure evidente *che vi sono quantità tanto minori l'una dell' altra quanto maggiore è il loro valore assoluto*. E noi replichiamo: tutte e tre le indicate formole sono risultati certi evidenti al pari di qualunque altro del calcolo, perchè derivanti da operazioni appoggiate ad incontrastabili principi; ma niuna di esse ci reca, come a primo aspetto parrebbe, ai nominati assurdi. Volete conoscere ove l' errore è nascosto? Meditate un poco sulle formole $-2<1$; $-3<0$; $-4<-1$. Voi credete che queste sieno espressioni di un rapporto fra due quantitá determinate: voi prendete cioè il -3, il -4, il -1 per segni di semplici quantità, mentre son segni della sottrazione di una quantità; ed ecco il falso concetto che sotto diverse foggie dà origine a tutte le false deduzioni che sogliono affacciarsi in proposito.

Le cose che prende di mira qualunque rapporto di ineguaglianza o eguaglianza, sono i risultati che in ciascun de' due membri abbiamo in seguito delle operazioni che vi sono indicate; e perciò trattandosi di sottrazioni, le cose su cui verte il rapporto sono i residui e non già le quantità che si debbono sottrarre. Che se questi residui per mancanza di minuendi non fossero espressi, come accade in tutti i primi membri, e nel secondo membro ancora dell' ultima delle tre formole $-2<1$; $-3<0$; $-4<-1$, non per questo ne segue che il rapporto di diseguaglianza prenda di mira in vece le quantità che si debbono sottrarre. Se ciò fosse, nei citati tre esempi dovrebbe verificarsi essere 2 minore di 1, 3 minore di zero, 4 minore di 1, il che è un assurdo. Che significano dunque le citate 3 formole?

La formola $-2<1$ che deriva dalla ineguaglianza $1<4$

allorchè ci facciamo a sottrarre il 3 da ambi i membri, ci rende avvertiti che dal suo 1.° membro che è 1 non si è potuto sottrarre interamente il 3, come si è sottratto dal 4 che costituisce il 2.° membro, cosicchè rimangono ancora in questo 1.° membro due unità da doversi sottrarre. Non ha dunque luogo realmente confronto alcuno tra il 1.° membro (ove non è espresso il residuo della sottrazione perchè questa non si può effettuare per mancanza del minuendo) ed il 2.° membro che è divenuto 1 in grazia della sottrazione che si è effettuata. La stessa formola però $-2<1$ ci esprime questo concetto, cioè che quando siasi aggiunto ad ambi i membri una quantità eguale per non alterarne il rapporto, e tale che la sottrazione indicata dal -2 esistente nel 1.° membro, possa aver luogo, il residuo che noi otterremo togliendo il 2 da questa quantità è minore della somma che otterremo aggiungendo alla stessa quantità quell' 1 che esiste nel 2.° membro.

Così pure l' altra formola $-3<0$ ci avverte che dal 1.° membro della ineguaglianza $1<4$ da cui essa deriva, non si è potuto interamente togliere il 4, come dal 2.° membro, essendovi rimaste 3 unità da doversi sottrarre. Non ha dunque luogo realmente confronto alcuno tra il primo membro ove non è espresso il residuo della sottrazione, perchè non si è potuto effettuar per l' intero, ed il 2.° in cui si è effettuata e si è ottenuto zero di resto. La stessa formola però $-3<0$ ci esprime il seguente concetto, che cioè quando siasi aggiunta ad ambi i membri una quantità eguale per non alterarne il rapporto, e tale quantità da dar luogo alla sottrazione indicata dal -3, il residuo che noi otterremo togliendo il 3 da questa quantità è minore di questa quantità stessa cui nulla o si aggiunga o si tolga.

Finalmente l' ultima formola $-4<-1$ ci avverte, che nè dal 1.° nè dal 2.° membro della ineguaglianza $1<4$ si è potuto togliere il 5, perchè rimane ancora 4

da doversi togliere nel 1.° membro, ed 1 da doversi togliere nel 2.° Non può dunque aver luogo realmente confronto alcuno, perchè per mancanza del minuendo, mancano nell' uno e nell'altro membro i risultati della sottrazione, tra cui dovrebbe osservarsi il rapporto. La stessa formola però $-4<-1$ ci esprime questo concetto: quando siasi aggiunto ad ambi i membri una quantità eguale ad oggetto di non alterarne il rapporto, e tale da dar luogo alle indicate sottrazioni, il residuo che noi otterremo togliendo da queste quantità il 4 sarà minore di quello che otterremo togliendovi 1. E così quando diciamo che -1, -2, -3, -4 ec. è una serie di termini decrescenti, non altro significare vogliamo se non che sono decrescenti i successivi residui che si vanno ottenendo col togliere da una data quantità prima 1, poi 2, poi 3, poi 4 ec.

E per intender gli esposti veri, di non altro fa d'uopo esser convinti che di queste massime » E I. *Il residuo che si ottiene togliendo da una data quantità qualche cosa è minore della somma che risulta aggiungendo alla stessa quantità qualche altra*. II. *Il residuo che si ottottiene da una quantità quando le si tolga qualche cosa è minore di quello che si ottiene quando o non le si tolga nulla o le si tolga una quantità più piccola* » ovvero *il residuo è tanto minore quanto, posto costante il minuendo, si fa maggiore il sottraendo.* Ecco le verità alle quali facciamo ricorso per dare l' idea a nostro credere esatta delle quantità negative. E certamente queste verità non sono tratte dai più reconditi penetrali d' una Metafisica trascendentale, nè sì astruse ci sembrano da non essere intelligibili a chicchesia.

Sì: con queste semplicissime e chiarissime verità tutto il pomposo apparato, tutto l' enigma delle quantità e minori di zero e che hanno un valore relativo tanto più piccolo quanto più sono grandi, sparisce. In tal guisa men-

tre noi riguardiamo come legittime le formole $-2<1$; $-3<0$; $-3<-1$ a cui le tante volte il calcolo ci conduce, neghiamo al tempo stesso i sopranominati assurdi senza contraddirci in conto alcuno. Che se la frase di *quantità minori di zero* volesse usarsi, si usi pure; poichè quando si sieno rettificate le idee, poco male se non v' è nel linguaggio la più scrupolosa esattezza (5).

Circa l' esattezza però delle idee non transigiamo al certo sì facilmente. Ed è perciò che quando si presentano delle formole consimili alle pocanzi esposte $-2<1$ $-3<0$; $-4<-1$, noi stimiamo necessario esporre agli studenti il vero significato di esse per mezzo dei rilievi addietro esposti ed adattati alla intelligenza dei più idioti pur anche, piuttosto che radicar nelle loro menti delle false idee intorno alle quantitá negative che sono in conflitto con la ragione. No: non va posta barriera alcuna di separazione fra la Filosofia e la Matematica, le quali al dire del profondo Tacquet (6) *sono due indivisibili gemmel-*

(5) Così p. es. dopo di aver notato che nella nozione del *Volume* conviene far astrazione da quella idea che suole comunemente chiamarsi *solidità*, se ciò non pertanto taluno amasse di esprimere questa nozione da cui conviene che sia eliminata la idea della *solidità* col nome appunto di *solido*, il faccia pure. Se dopo di aver notato che le ragioni, le proporzioni e progressioni che noi con La Grange e La Croix chiamiamo *per quoto* e che dagli antichi si chiamavan *geometriche*, non sono meno aritmetiche di quelle *per differenza* che esclusivamente per *aritmetiche* sogliono essere dagli antichi distinte, si proseguisse a far uso delle vecchie inesatte denominazioni, non ne meneremo gran rumore per questo. Ne piace, è vero, che per quanto si può all' esattezza delle idee quella pure corrisponda del linguaggio: ma siamo al tempo stesso ben poco amici della guerra delle parole, cosicchè più che ad esse attendendo alle cose, non viene in noi menomata per nulla la somma stima che abbiamo per que' Matematici che le indicate innovazioni non hanno ancora adottato. Riprovevole infatti sarebbe il divisamento di obbligar tutti a rinunziare a quelle denominazioni le quali, sebbene inesatte, pure sono state in uso per molti secoli, siccome non lodevole al certo sarebbe la pretensione di obbligarci a far uso di esse oggi che in moltissime scuole dietro l'esempio dei Classici che hanno rettificato il linguaggio, sono già molti anni, che vennero adottate le nuove.

(6) De ortu et progressu matheseos.

le; ed è crudele chiunque attenta alla nativa loro concordia. E quando celebri ingegni gridano che è *tempo ormai di purgare la matematica dai concetti illusori e lambiccati con i quali a dispetto della buona filosofia si è voluto svisarla*, coltivare e proteggere non si debbono col sostener per esempio, che noi abbiamo l'idea di quantitá più piccole dello zero. *Si vous vous efforcez un moment de concevoir une telle idée, vous me domenderez sans doute quel est l'homme assez absurde pour en affirmer la possibilité!* Così prosegue il profondo Belierez alla pagina 318 ed ultima del suo libro, mostrandoci egli in cotal guisa di convenir pienamente con quanto noi esponemmo vari anni prima di lui, allorchè indicammo che ci sembra impossibile il potere ammettere quantità più piccole dello zero, più piccole cioè del nulla, giacchè il segno 0 nei calcoli è stato sempre considerato per nulla da tutti i Matematici e Metafisici di ogni tempo. *Ci sembra,* dicemmo però, perchè non siamo invasi al certo dall' orgoglioso pregiudizio fatale ai progressi dello spirito umano di crederci incapaci di abbagli. Se noi fossimo nell' errore, ameremmo spogliarcene a tutta possa, e grato oltremodo ci sarebbe il veder fatti di pubblico dritto i solidi argomenti, se ve ne sieno, che valessero a dissiparlo. Noi gli accoglieremmo senza alcuna prevenzione, e con quel trasporto che ispira il desiderio di conoscere il vero, protestandoci fin d' ora docilissimi a rinunziar di buon grado agli esposti principi del lodato Belierez che nostri son pure, ed a far sincerissimo plauso a chi, falsi mostrando i nostri modi di vedere, ci sapesse trarre d' inganno.

. . . . *Si quid novisti rectius istis*
Candidus imperti: si non, his utere mecum.